Métodos Numéricos y Simulaciones en Astrofísica

Parte 6: Integradores Simplécticos y Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

Integradores Simplécticos

- Planteo de dinámica Hamiltoniana.
- Aprovecha las peculiaridades de un hamiltoniano separable.
- Se utilizan las soluciones analíticas del problema.
- El planteo temporal de las posiciones $\mathbf{q}_i$ y los momentos $\mathbf{p}_i$ se escribe como:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{-dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Donde H es el hamiltoniano.

Integradores Simplécticos

Ejemplo: problema de los N-cuerpos

$$H = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{p_i^2}{2m_i} - \sum_{i<j} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}.$$

El hamiltoniano es separable

$$H = H_{Kepler} + H_{interaction}.$$

$$H_{Kepler} = \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r}.$$

Integradores Simplécticos

La parte kepleriana tiene solución analítica:

$$\mathbf{r}(t) = f(t, t_0)\mathbf{r}(t_0) + g(t, t_0)\mathbf{v}(t_0),$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{f}(t, t_0)\mathbf{r}(t_0) + \dot{g}(t, t_0)\mathbf{v}(t_0),$$

$$f(t, t_0) = \frac{a}{r_0}[\cos(E - E_0) - 1] + 1,$$

$$g(t, t_0) = (t - t_0) + \frac{1}{n}[\sin(E - E_0) - (E - E_0)],$$

Integradores Simplécticos

La parte no-kepleriana se aplica impulsivamente (principio de promediado) :

$$\Delta \mathbf{v}'_i = \Delta t \left(\frac{d\mathbf{v}'_i}{dt} \right)_{\text{interaction}},$$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}'_i}{dt} \right)_{\text{interaction}} = \frac{1}{m'_i} \left(-\frac{\partial H_{\text{interaction}}}{\partial \mathbf{r}'_i} \right).$$

Integradores Simplécticos

- Si el paso de integración es fijo se conserva la energía (H).
- Entonces, no se puede usar para calcular acercamientos. Usualmente se toman 3 R_H, donde $R_H = a_i (m_i / m_0)$^(1/3).
- Como H viene expresado considerando un centro fijo, si hay más de dos partículas hay que utilizar coordenadas jacobianas para corregir ($\mathbf{p}_i$ están referidas al centro de masa pero las $\mathbf{r}_{i,j}$ no).

Smoothed Particle Hydrodynamics

• Problemas hidrodinámicos en astrofísica (formación y evolución de galaxias, formación estelar, discos, etc.)
• Se diferencian de problemas de n-cuerpos en que el gas experimenta efectos de **presión**.
• En escalas microscópicas, las colisiones entre moléculas y/o átomos cambia sistemáticamente sus trayectorias.
• En escalas macroscópicas la suma de estos efectos produce una fuerza que es proporcional al gradiente local de la presión.

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i\,,$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i}\nabla P_i - \nabla \Phi_i\,,$$

Movimiento de una celda de fluído

P es la presión
ρ es la densidad
Φ es el pot. gravitatorio

Smoothed Particle Hydrodynamics

• La idea es evaluar el gas en una grilla para obtener los valores necesarios para aplicar en las ecuaciones.

• El problema es cómo evaluar:

$$\frac{1}{\rho_i}\nabla P_i$$

• La idea es que en SPH cada partícula representa una distribución de densidad:

$$\rho_j(\mathbf{r}) = m_j W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|; h),$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j(\mathbf{r})$$

•Donde W es un kernel que describe la distribución de masa asociada a a partícula j.

Smoothed Particle Hydrodynamics

• El objetivo del kernel es suavizar la distribución y hay varias opciones para elegir. Por ejemplo, un kernel gaussiano:

$$W(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|;h) = \frac{1}{h^3\pi^{3/2}} \exp[-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|/h)^2] \,.$$

Donde h se denomina “escala de suavizado”. Otro ejemplo es un kernel compacto:

$$W(r,h) = \frac{1}{\pi h^3}\left[1 - \frac{3}{2}(r/h)^2 + \frac{3}{4}(r/h)^3\right], \quad 0 \le r/h \le 1$$

$$W(r,h) = \frac{1}{4\pi h^3}[2-(r/h)]^3 \quad 1 \le r/h \le 2$$

$$W(r,h) = 0 \quad r/h \ge 2$$

$r = |r - r_j|$

Smoothed Particle Hydrodynamics

- El kernel debe definirse de modo que:

$$\int_0^\infty W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|; h) d\mathbf{r} = 1$$

$$\lim(h \to 0) W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|; h) = \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

Donde δ_D es una delta de Dirac.

Smoothed Particle Hydrodynamics

• La escala de suavizado se define como:

$$h = \frac{h_0}{<\rho>^{1/3}}, \qquad <\rho> = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\rho_i$$

• pero se puede tomar variable, por ejemplo dependiendo de cambios de densidad:

$$\frac{dh_i}{dt} = -\frac{h_i}{3\rho_i}\frac{d\rho_i}{dt}.$$

Smoothed Particle Hydrodynamics

• Cualquier cantidad física asociadas con el fluído (presión, temperatura, etc.) se estima usando interpolación entre los valores conocidos usando la densidad como valor de peso:

$$A(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h)$$

Donde **r** se refiere a la posición de una partícula i y ρ_i / m_i es el número de partículas por unidad de volumen.

• Las derivadas de las cantidades físicas se obtienen derivando el kernel. Por ejemplo:

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{P_j}{\rho_j} \nabla W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h)$$

Smoothed Particle Hydrodynamics

Un código SPH simple debe incluir:

- condiciones iniciales (posición, velocidad, masas, densidad).
- un método para calcular el potencial gravitatorio.
- una ley física relacionando presión y densidad.
- un esquema de integración numérica para avanzar posición y velocidad (Euler!).
- una forma de determinar el gradiente de presión.
- un método para determinar el valor de h.