Unidad VII. Algunos procesos disipativos. Concepto de sistema caótico

En las unidades precedentes hemos visto que la dinámica de los objetos que se mueven en un sistema planetario está dominada por la fuerza de gravedad producida por el objeto central y en general esta fuerza tiene un notorio predominio sobre cualquier otra fuerza que accione sobre el sistema. De todas maneras, hace tiempo que se desarrollan trabajos que indican que algunas *fuerzas no gravitatorias* tienen gran relevancia en el movimiento de pequeños cuerpos dado que modifican notoriamente sus ecuaciones de movimiento. El caso más conocido es el accionar de las fuerzas producidas por la violenta emisión de gases en cometas, proceso que modifica sus órbitas haciendo a veces difícil la recuperación del objeto en un posterior pasaje.

Muchos sistemas de ecuaciones no lineales, como los vistos en las unidades precedentes, se encuentran afectados por una evolución temporal irregular e inpredecible a la que en dinámica se la denomina *caos*. La dinámica caótica afecta muchos procesos estudiados en mecánica celeste y es conveninete mencionar algunos conceptos elementales.

Entonces, en esta unidad discutiremos algunas fuerzas no gravitatorias que se encuentran usualmente en el estudio del movimiento de algunos cuerpos del Sistema Solar y se presentará una discusión elemental de los efectos del caos en sistemas dinámicos.

1. La presión de radiación:

Dado que en el Sistema Solar la fuerza gravitatoria ejercida por el cuerpo central del sistema domina el movimiento de cualquier partícula, vamos a considerar que cualquier otra fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúe sobre una partícula de masa m y radio s, y a una distancia $\vec{\mathbf{r}}$ del cuerpo central de masa $\mathcal{M}$, será considerada como una perturbación:

$$\vec{\mathbf{F_g}} = m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2\mathcal{M}m}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{F}},$$

donde k^2 es la constante de Gravitación.

La PRESIÓN DE RADIACIÓN es la presión ejercida sobre cualquier superficie expuesta a la radiación electromagnética. La fuerza debida a la presión de radiación sobre una superficie πs^2 perpendicular a la dirección solar es:

$$\vec{\mathbf{F_r}} = \frac{S_0\pi s^2 Q_{pr}}{r^2 c}\,\hat{\mathbf{r}}, \qquad \text{(VII-1)}$$

donde S_0 es la constante solar (o la densidad de flujo a una distancia unitaria), c es la velocidad de la luz, y Q_{pr} es un factor de eficiencia para la presión de radiación. la ecuación (VII-1) indica que la fuerza ejercida por la presión de radiación es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, por lo que resulta conveniente para evaluar su contribución definir la cantidad adimensional:

$$\beta = -\frac{\vec{\mathbf{F_r}}}{\vec{\mathbf{F_g}}} = \frac{S_0 \pi s^2 Q_{pr} r^2}{ck^2 \mathcal{M} m r^2} = C Q_{pr} \frac{\pi s^2}{m}, \tag{VII-2}$$

donde $C = 7{,}6 \times 10^{-5}\ g\,cm^{-2}$. Como el Sol radía casi toda su energía es una angosta banda centrada en $0{,}6\,\mu m$, la transición de óptica geométrica a dispersión Rayleigh se produce para tamaños de partícula del orden del micrón. Si s es mayor que $\approx 10\,\mu m$, la expresión $\beta \propto s^2/m \propto s^{-1}$ es una buena aproximación.

La fuerza resultante de la combinación de la fuerza gravitatoria y la radiación se puede escribir:

$$\vec{\mathbf{F_T}} = \vec{\mathbf{F_g}} + \vec{\mathbf{F_r}} = -\frac{k^2(1-\beta)\mathcal{M} m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{VII-3}$$

lo que significa que la partícula sujeta a la fuerza de radiación "ve" una masa central efectiva $\mathcal{M}(1-\beta)$. Si la partícula tiene un tamaño de $s \approx 1\,\mu m$ y una densidad de $\rho = 2{,}7\,g\,cm^{-3}$ tenemos que $\beta \approx 0{,}56$, la fuerza de radiación es suficiente para desligar la partícula de la atracción gravitatoria, dejando el Sistema Solar en órbitas hiperbólicas. A estas partículas se las denomina *meteoroides* β.

Las partículas con tamaños levemente superiores a $1\,\mu m$ se moverán en órbitas con un semieje mayor considerablemente más grande que aquel que le correspondía originalmente y se denominan *meteoroides* α. Por ejemplo, asumiendo $\rho = 2{,}7\,g\,cm^{-3}$ los valores de β para partículas de 9, 4, y $2\,\mu m$ son 0,05, 0,12, y 0,26, respectivamente, lo que indica que este efecto no resulta significativo para partículas de tamaños superiores a $10 - 20\,\mu m$.

Si bien hay un acuerdo generalizado respecto a la ecuación de movimiento de partículas esféricas de polvo sujetas a presión de radiación, aún está en debate su interpretación bajo una formulación relativista del problema.

2. El efecto Poynting - Robertson:

La interacción de una partícula con la luz solar también genera una fuerza de frenado que es débil en comparación con la generada por presión de radiación pero que disipa energía y momento causando que la partícula caiga en espiral al Sol.

El FRENADO POR EFECTO POYNTING - ROBERTSON puede ser visto como el resultado de la aberración de la luz vista desde la partícula y un corrimiento Doppler inducido por el cambio de momento.

Como las velocidades de los objetos en el Sistema Solar son mucho menores que la velocidad de la luz, la radiación solar que llega a la partícula parece provenir de un Sol desplazado en la dirección de movimiento, lo que introduce una componente de frenado perpendicular al radio vector que resulta proporcional a la componente transversal de la velocidad dividida por la velocidad de la luz.

Por otro lado, y como la partícula se mueve a una cierta velocidad, debido al efecto Doppler absorverá menos energía de la radiación que si estuviera en reposo, y el mismo proceso tendrá lugar cuando la partícula emita nuevamente la energía absorvida.

Entonces, a primer orden en v/c la fuerza total ejercida sobre la partícula debida a la presión de radiación es:

$$\vec{\mathbf{F_{PR}}} = |\vec{\mathbf{F_g}}|\beta \left[\left(1 - \frac{2}{c}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r} - \left(\frac{r}{c}\left|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|\right) \hat{\mathbf{u}}_\theta \right], \tag{VII-4}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$ y $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ son vectores unitarios en la dirección radial y perpendicular a ésta en el plano de la órbita, respectivamente, y $|\vec{\mathbf{F_g}}|\beta$ es el módulo de la fuerza producida por la presión de radiación. El primer término de la ecuación (VII-4) corresponde a la fuerza producida por la radiación, $\vec{\mathbf{F_r}}$, el segundo término se debe al corrimiento Doppler, mientras que el último término es el frenado por el EFECTO POYNTING - ROBERTSON. El término debido al corrimiento Dopler actúa como una corrección a la fuerza producida por la presión de radiación.

El efecto Poynting - Robertson disipa energía y momento angular orbital, y resulta considerable para las partículas mas pequeñas (tamaños menores a $\approx 1\,m$). Por ejemplo, una partícula con $\beta < 1$ en una órbita circular inicial a una distancia heliocéntrica r y que no experimente fuerzas transversales debidas a la presión de radiación, cae al Sol siguiendo una órbita en espiral en unos $400\,r^2/\beta$ años.

3. Interacción corpuscular con el viento solar:

Salvo por el factor de eficiencia Q_{pr}, la ecuación (VII-4) no depende de la naturaleza ondulatoria de la luz y puede derivarse mediante una formulación estríctamente corpuscular del problema. Los protones que viajan en el viento solar colisionan con la partícula y producen un efecto similar al de la fuerza de radiación. Esta FUERZA CORPUSCULAR puede ser representado por una ecuación similar a la (VII-4):

$$\vec{\mathbf{F_{sw}}} = |\vec{\mathbf{F_g}}|\beta_{sw} \left[\left(1 - \frac{2}{v_{sw}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r} - \left(\frac{r}{v_{sw}}\left|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|\right) \hat{\mathbf{u}}_\theta \right], \tag{VII-5}$$

donde v_{sw} es la velocidad del viento solar. El cociente entre la fuerza corpuscular y la gravitatoria es:

$$\beta_{sw} = -\frac{\vec{\mathbf{F_c}}}{\vec{\mathbf{F_g}}} = \frac{m_{p,o}\pi s^2 C_D r^2}{2k^2 \mathcal{M} m r^2} = C_p \frac{\pi s^2}{m}, \qquad \text{(VII-6)}$$

donde C_D es un coeficiente que mide el frenado del flujo de moléculas en el viento solar, $C_p \approx 3{,}6 \times 10^{-8}\ g\,cm^{-2}$, y la densidad de flujo del momento del protón a $1\,UA$ es $m_{p,o} \approx 2{,}15 \times 10^{-8}\ dyn\,cm^{-2}$. Este último valor es casi el mismo para condiciones de viento solar rápido o lento. La fuerza producida por otros iones del viento solar puede calcularse de la misma manera que para los protones, pero su contribución es mucho menos importante.

La relación entre la fuerza corpuscular producida por los protones del viento solar y la fuerza producida por la presión de radiación es $\vec{\mathbf{F_{sw}}}/\vec{\mathbf{F_{PR}}} \approx 4{,}7 \times 10^{-4}$, por lo que la fuerza corpuscular es *despreciable* comparada con la fuerza que produce la presión de radiación. Lo que no resulta despreciable es la relación entre los términos que producen el frenado $[(\vec{\mathbf{F_{sw}}} - \vec{\mathbf{F_c}})/(\vec{\mathbf{F_{PR}}} - \vec{\mathbf{F_r}})]$, dado que hay un factor c/v_{sw} en favor del frenado corpuscular respecto del producido por radiación. La fuerza de frenado producida por interacción corpuscular tiene notorias variaciones debidas a la variación de velocidad del viento solar y su dependencia con la distancia y latitud heliocéntrica.

4. Las lluvias de meteoritos:

Hace más de un siglo que se sabe que las lluvias de meteoritos están relacionadas con los cometas, y hoy en día se conoce cuál es el objeto de origen para la gran mayoría de las lluvias importantes.

Cuando un cometa se acerca al Sol y entra en actividad expulsa gran cantidad de gas y partículas de polvo. Como vimos en secciones anteriores, estas partículas se ven instantáneamente afectadas por fuerzas no gravitatorias como la presión de radiación, efecto Poynting - Robertson, etc., y sus parámetros orbitales variarán lentamente de los valores adquiridos inicialmente. Este proceso dinámico produce una dispersión de las partículas a lo largo de toda la órbita del cometa en una región de sección aproximadamente circular, donde la densidad de partículas cae del centro hacia los bordes.

En las regiones cercanas a los nodos del cometa esta región poblada de partículas cruza el plano eclíptico. La Tierra en su movimiento orbital puede ingresar a lass zonas elípticas definidas por esta intersección y en ese momento se observará una LLUVIA DE METEORITOS que puede durar varios días y tener diferente intensidad dependiendo de que tan grande sea la región con partículas alrededor del cometa y cuanto tarde la Tierra en pasar por ella.

Desde la superficie de la Tierra se verá que cuando los meteoritos interactúan con la atmósfera generan trazos que parecen provenir de un punto en el cielo denominado RADIANTE, el cual corresponde al eje de la región poblada de partículas. la lluvia de meteoritos toma el nombre de la constelación o estrella más brillante cercana al radiante (Oriónidas y η Acuáridas asociadas al cometa P/Halley, las Leónidas asociadas al cometa P/Tempel-Tuttle, las Dracónidas asociadas al cometa P/Giacobini-Zinner).

Algunas lluvias de meteoritos están asociadas a objetos desaparecidos o que no presentan actividad cometaria. Un ejemplo son las Leónidas que están relacionadas con la órbita del cometa 1862 III o las Gemínidas que están asociadas al asteroide (3200) Phaeton (posiblemente, un cometa extinto).

5. El efecto Yarkovsky:

Existe una anisotropía en como la radiación solar calienta la superficie de cualquier objeto en el Sistema Solar debido a la rotación. Si el objeto está rotando y la respuesta al calentamiento no es instantáneo debido a cierta inercia térmica se produce un gradiente térmico en la superficie del objeto. La radiación térmica emitida por las regiones más calientes de la superficie se lleva más momento lineal the la radiación emitida por las zonas más frias. El resultado final es un efecto térmico que afecta el movimiento orbital denominano EFECTO YARKOVSKY.

El efecto producido depende del cociente entre el tiempo de relajación térmica t_{rel} y el período de rotación t_{rot}, que es el llamado *parámetro térmico*, Φ. Si t_{rel} es comparable o menor que t_{rot}, la componente longitudinal de los gradientes de temperatura de la superficie es significativa y la fuerza resultante tiene componentes perpendiculares al eje de rotación del objeto. Este es el efecto *diurno* de Yarkovsky que resulta importante para objetos con períodos de rotación largos o baja inercia térmica. El efecto diurno de Yarkovsky es máximo para oblicuidad cero y puede producir un aumento o dismunición del semieje mayor de la órbita, dependiendo del sentido de rotación.

Por el contrario, Si t_{rel} es mucho mayor que t_{rot},la componente longitudinal de los gradientes de temperatura de la superficie tienden promediarse dejando sólo los componentes latitudinales y la fuerza resultante se alinea con el eje de rotación. Este es el efecto *estacional* de Yarkovsky que es importante para objetos pequeños (diámetros de pocos metros) con períodos de rotación relativamente cortos. Es un efecto netamente no local dado que la respuesta térmica al calentamiento solar se produce en diferentes puntos de su órbita. El efecto estacional de Yarkovsky es máximo para una oblicuidad de 90° y sólo produce una dismunición del semieje mayor de la órbita.

Sin entran en los detalles del cálculo y si consideramos sólo el efecto diurno, que para objetos con radios de $\approx 500\,m$ es un orden de magnitud superior al efecto estacional, la fuerza producida es:

$$\vec{\mathbf{F_Y}} = \frac{k^2\mathcal{M}m}{2a^2v^2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_Y \vec{\mathbf{v}}, \tag{VII-7}$$

donde a es el semieje mayor de la órbita, v la velocidad del objeto, y $(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t)_Y$ es la variación del semieje mayor debido al efecto diurno de Yarkovsky:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_Y \simeq 2{,}5\times 10^{-4}\left(\frac{UA}{10^6\,yr}\right)\frac{500\,m}{s}\cos\zeta, \tag{VII-8}$$

donde s es el radio del objeto, ζ es el ángulo entre el eje de rotación y la dirección solar, ángulo que fija el sentido de la fuerza dependiendo de la orientación del eje de rotación.

6. El exponente de Lyapunov y los sistemas caóticos:

Supongamos un sistema donde dos partículas tienen posiciones iniciales $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{r}}+\vec{\epsilon}$, donde $\vec{\epsilon}$ es un vector infinitesimal. Si hacemos evolucionar este sistema bajo un conjunto de ecuaciones no lineales, luego de un cierto tiempo t las partículas estarán separadas por una cierta distancia debido a diferentes causas. Si el sistema es *no caótico* la diferencia entre las posiciones finales de las partículas será un resultado de la acumulación de errores de diferente tipo, pero esa diferencia crecerá *linealmente* con el tiempo. Por otro lado, si el sistema es *caótico* la diferencia entre las posiciones finales de las partículas crecerá *exponencialmente* con el tiempo, por lo cual será imposible conocer el estado del sistema en un lapso relativamente corto dado que pequeños errores iniciales resultan en errores enormes al final. Es importante recalcar que "caótico" no significa "desorden", sino que no es posible hacer predicciones exactas a largo plazo.

Un ejemplo claro sobre los posibles efectos de un sistema caótico es soltar una pelota justo sobre la arista del tejado de una casa varias veces; pequeñas desviaciones en la posición inicial pueden hacer que la pelota caiga por uno de los lados del tejado o por el otro, conduciendo a trayectorias de caída y posiciones de reposo final completamente diferentes. Cambios minúsculos que conducen a resultados totalmente divergentes.

En el Sistema Solar las órbitas caóticas resultan en general de la superposición de resonancias. Una explicación moderna a los vacios de Kirkwood, y de otras zonas de características similares en el cinturón exterior, es caos producido por este efecto. Incluso Mercurio y Plutón se ven afectados por una dinámica caótica que afecta sus órbitas.

Una forma usual en mecánica celeste para estimar la sensibilidad de un sistema a las condiciones iniciales es calcular el EXPONENTE DE LYAPUNOV. Si se hace evolucionar un sistema a partir de dos posiciones iniciales levemente diferentes, $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{r}}+\vec{\epsilon}$, luego de n iteraciones su divergencia puede ser caracterizada aproximadamente por:

$$\epsilon(n) \approx \epsilon e^{\lambda n}, \tag{VII-9}$$

donde λ es el exponente de Lyapunov que mide *la tasa promedio de divergencia del sistema*. Si λ es negativo, trayectorias levemente separadas convergerán y la evolución del sistema no es caótica. Si λ es positivo, trayectorias inicialmente próximas divergen y se dice que la evolución es sensible a las condiciones iniciales y, por lo tanto, caótica.

Supongamos que después de n pasos el estado del sistema es tal que:

$$(\vec{\mathbf{r}} + \vec{\epsilon}) - \vec{\mathbf{r}} \approx \epsilon e^{\lambda n},$$

o, lo que es lo mismo:

$$\ln\left[\frac{(\vec{\mathbf{r}} + \vec{\epsilon}) - \vec{\mathbf{r}}}{\epsilon}\right] \approx \lambda n.$$

Para ϵ pequeño, esta expresión se puede escribir como:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\right|,$$

y para un número infinito de pasos:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\right|. \tag{VII-10}$$